# Το αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία συνήθων λαθών στα Μαθηματικά

*Γιάννης Π. Πλατάρος*
*M.Edu. στη διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών*
*Δ/ντης 1[ου] ΓΕΛ Μεσσήνης*
*Ηλ.ταχ.* Plataros@sch.gr

**Πρόλογος :** Το αντιπαράδειγμα, είναι μια αρχαία αποδεικτική μέθοδος . Ουσιαστικά πρόκειται για ειδική περίπτωση της εις άτοπον απαγωγής . Παρ΄ ότι επικαλύπτεται από την αποδεικτική μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, δεν σημαίνει ότι θα πρέπει να απουσιάζει από τα διδακτικά εγχειρίδια (όχι μόνο των μαθηματικών ) της Δ/βάθμιας Εκ/σης έστω και ως νύξη ή ως λέξη, όπως συμβαίνει τώρα. Σε κάθε περίπτωση όμως , μπορεί και πρέπει να χρησιμοποιείται έστω και σιωπηρώς ή αφανώς.

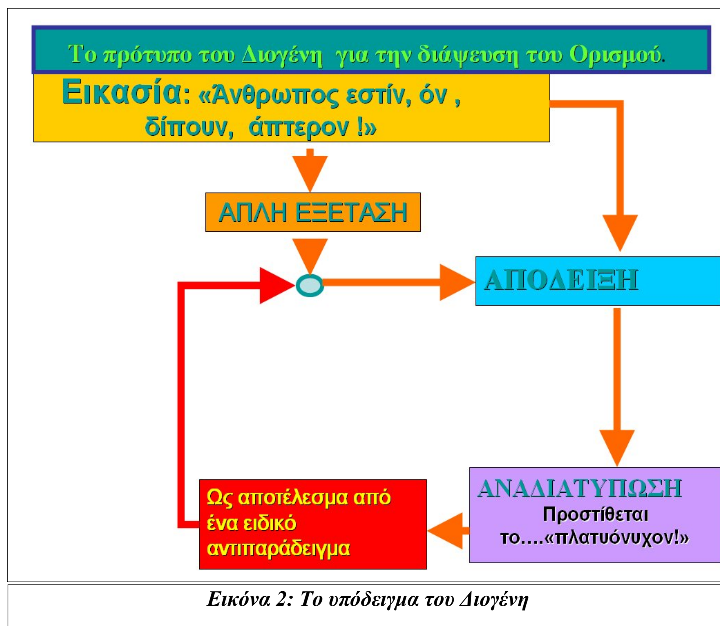
**Ο μαθηματικός ορισμός του αντιπαραδείγματος :** Εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\forall x : P(x)$» είναι ψευδής, πρέπει κι αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\exists x : \neg P(x)$» είναι αληθής. Δηλαδή , πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο $\chi_0$ του σχετικού συνόλου αναφοράς έτσι ώστε η $P(\chi_0)$ να είναι ψευδής. Το $\chi_0$ θα λέγεται τότε **αντιπαράδειγμα** στην πρόταση «$\forall x : P(x)$»

Λ.χ. η πρόταση: *«Ένα κοράκι που δεν ήταν μαύρο παρατηρήθηκε στην θέση χ την ώρα t»* , συνιστά αντιπαράδειγμα στην πρόταση *«Όλα τα κοράκια είναι μαύρα»*

**Ένα αρχαίο αντιπαράδειγμα σε ορισμό:** Ο Διογένης ο Λαέρτιος, διασώζει ένα ανέκδοτο με τον Διογένη τον κυνικό, όπου όπως γράφει: «…Pl£twnoj Ðrisamšnou, ”AnqrwpÒj ™sti zùon d…poun ¥pteron, kaˆ eÙdokimoàntoj, t…laj ¢lektruÒna e„s»negken aÙtÕn e„j t¾n scol¾n ka… fhsin, « oátÒj ™stin Ð Pl£twnoj ¥nqrwpoj» Óqen tù ÓrJ prosetšqh tÕ platuènucon…»


*Εικόνα 1: Το ζωντανό αντιπαράδειγμα του Διογένη του Κυνικού*

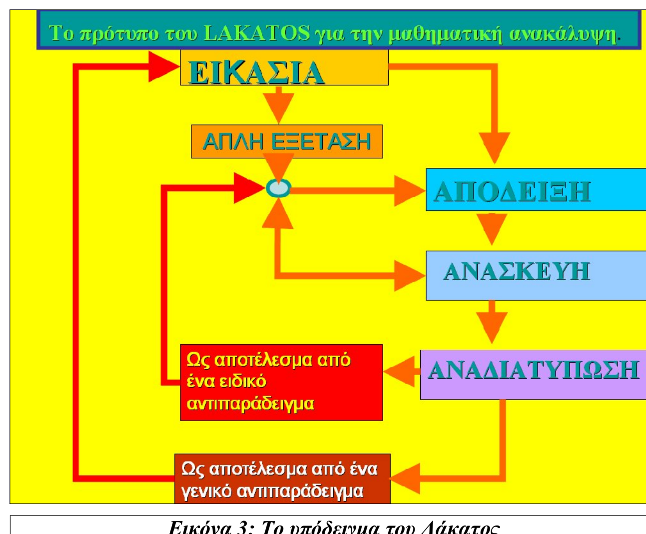
Ο παραπάνω ορισμός επιδέχεται ως αντιπαράδειγμα τον ξεπουπουλιασμένο κόκορα της διπλανής φωτογραφίας. Αυτό επιφανειακά, διότι κατά βάθος, αυτή είναι και η δομή της μαθηματικής ανακάλυψης (κατά τον Λάκατος) που διαγραμματικά , μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω σχήμα: Ο αρχικός ορισμός αποτελεί μια εικασία ορισμού, γίνεται απλή εξέταση και φαίνεται σωστός, όμως ένα ειδικό αντιπαράδειγμα τον διαψεύδει , αναθεωρείται, προστίθεται το πλατυόνυχον για να αναθεωρηθεί κι αυτό στο μέλλον, αφού και ο γορίλλας είναι πλατυόνυχος! (δεν μας διαφωτίζει περαιτέρω ο Διογένης Λαέρτιος !)



*Εικόνα 2: Το υπόδειγμα του Διογένη*

Η εικόνα 3 , δείχνει το πλήρες υπόδειγμα του Λάκατος για την μαθηματική ανακάλυψη, το οποίο , απλώς είναι λεπτομερέστερο του αρχαίου υποδείγματος. Ουσιαστικά όμως, αυτό φανερώνει την κεντρική σημασία του αντιπαραδείγματος σε επιστημονικό επίπεδο.

Σε επιστημολογικό , το αντιπαράδειγμα αποτελεί τον πυρήνα της διαψευσεοκρατίας, η οποία σχηματικά μπορεί να συνοψιστεί στην φράση «επιστημονικό, είναι ό,τι είναι διαψεύσιμο» (συνήθως με αντιπαράδειγμα θα λέγαμε)



*Εικόνα 3: Το υπόδειγμα του Λάκατος*

**<u>Η διδακτική αξία των αντιπαραδειγμάτων:</u>** Κάθε μαθηματική έννοια χωρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται σε δύο κλάσεις:

- Στην κλάση των παραδειγμάτων (examples) που την πληρούν και
- Στην κλάση των αντιπαραδειγμάτων (counterexamples ή non examples) που δεν την πληρούν.

Διδακτικά , η μη χρήση αντιπαραδειγμάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρεί από τον διδάσκοντα ένα μέρος της διδακτικής του ισχύος.

**<u>Το αντιπαράδειγμα ως εργαλείο σε ετοιμότητα :</u>** Μία συνήθης χρήση, μπορεί να είναι μια άμεση απάντηση σε λανθασμένο ορισμό. Λόγου χάριν:

**Μαθητής**: «Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν ως διαιρέτες τους τον εαυτό τους και την μονάδα»

**Καθηγητής**: Αν είναι έτσι , και το 8 πρώτος είναι, γιατί έχει ως διαιρέτες του και το 1 και το 8 ……Με αυτό τον κανόνα, όλοι οι αριθμοί είναι πρώτοι!....

**Σχόλιο:** Τετριμμένο, εύκολο αντιπαράδειγμα για κάθε διδάσκοντα

**Μαθητής:** Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα , προσθέτουμε τους αριθμητές τους και τους παρονομαστές τους

**Καθηγητής:** Αν είναι έτσι, τότε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, ενώ όλοι ξέρουμε, ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ δηλ. μισό και μισό κάνει ένα!

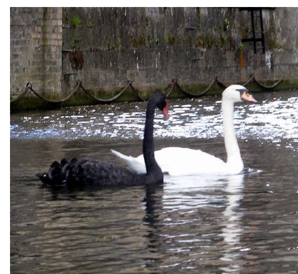
**Σχόλιο:** Το πιο απλό αντιπαράδειγμα της κλάσης $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\alpha}{2\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

Βεβαίως το κατά πόσον μπορεί να είναι κάποιος σε ετοιμότητα και να εξάγει επιτυχημένα αντιπαραδείγματα, είναι πιο εύκολο απ΄ ό, τι φαίνεται, διότι τα περισσότερα λάθη των μαθητών και πεπερασμένα είναι και λίγα και επαναλαμβανόμενα ανά γενιές μαθητών και συνήθη. Υπάρχουν τα γνωστά διδακτικά εμπόδια στα μαθηματικά που πηγάζουν από επιστημολογικά εμπόδια , από τα οποία τα μεν γνήσια αντιστέκονται πάρα πολύ στο να απαλειφθούν (αυτό άλλωστε δηλοί ο όρος διδακτικό εμπόδιο) κάποια όμως άλλα , μοιάζουν με τέτοια, αλλά μπορούν να ξεπεραστούν σχετικά εύκολα, με χρήση καταλλήλου παραδείγματος, το οποίο πρέπει να υπάρχει στο κάθε καλό διδακτικό βιβλίο.

**<u>Μια παράπλευρη χρησιμότητα του αντιπαραδείγματος:</u>** Αφανώς , εισάγεται η έννοια της απόδειξης μέσω αντιπαραδείγματος φυσιολογικά απλά και λογικά <u>πολύ πριν ομιλήσει κάποιος για την ίδια την έννοια της απόδειξης στα Μαθηματικά</u>:

Στο προηγούμενο παράδειγμα, λέει ο δάσκαλος: «Ο Κανόνας του Νίκου για την πρόσθεση κλασμάτων, δεν είναι σωστός, διότι αν δεχθούμε ότι είναι είναι σωστός ο κανόνας του, τότε θα πρέπει $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ενώ όλοι ξέρουμε, ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Εισάγεται δηλ. μια ειδική περίπτωση της εις άτοπον απαγωγής <u>μερικά χρόνια πριν μιλήσουμε γι αυτήν.</u> Και επειδή η έννοια του αντιπαραδείγματος είναι διεπιστημονική –Λογική, μπορεί να χρησιμοποιείται παντού. Για παράδειγμα: «Είναι όλοι οι κύκνοι λευκοί;» Στο

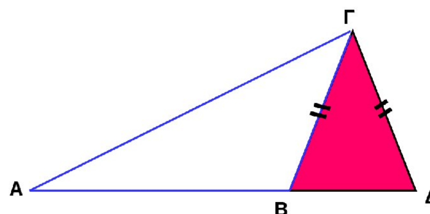


ενδεχόμενο «ναι» των παιδιών μπορεί να προσκομιστεί μια γνήσια φωτογραφία που δηλοί το λάθος και συνιστά αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό.

**<u>Το σύνηθες λανθασμένο κριτήριο ισότητας τριγώνων:</u>**

*Εικόνα 4: Ο μαύρος κύκνος-αντιπαράδειγμα*

*«Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν από δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, και από μία γωνία τους ίση, μία προς μία.»* Εδώ ο διδάσκων, πρέπει να είναι προετοιμασμένος να ανακαλέσει από την μνήμη του ή από τις σημειώσεις του (σύνηθες γαρ το λάθος) το παρακάτω γνωστό αντιπαράδειγμα , όπου προφανώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ, δεν είναι ίσα, καθώς το πρώτο είναι μέρος του δευτέρου , όμως πληρούν το λανθασμένο κριτήριο.




*Εικόνα 5: το σχήμα-αντιπαράδειγμα στο «κριτήριο» ΠΠΓ*

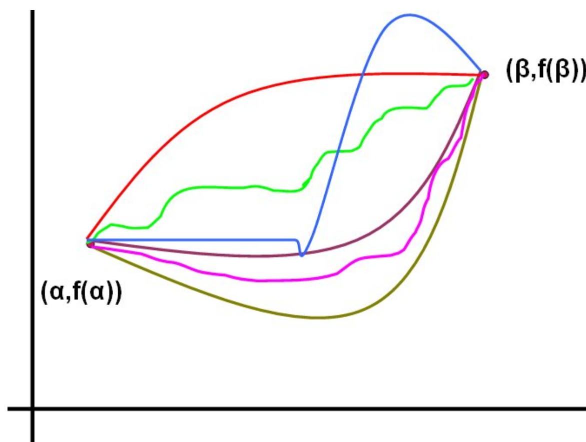
**<u>Γνωστική σύγκρουση και αντιπαράδειγμα:</u>**

Υπάρχει μια πρότερη (αρχαιότατη) κοινή γνώση: «Kaˆ tÕ Ólon , toà mšrouj me‹zon [εστίν]. (Η πέμπτη κοινή έννοια στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη) Έρχεται ιστορικά η νέα γνώση: Υπάρχουν άπειροι αριθμοί που ικανοποιούν την ανίσωση : (½) χ >χ. (λεκτικά: «το ήμισυ είναι μείζον του ολοκλήρου») Η επίλυση της ανίσωσης είναι αντιπαράδειγμα στην καθολική ισχύ της κοινής έννοιας του Ευκλείδη, αλλά η απλή επίλυση ή παράθεση της λύσης της ανίσωσης, **ουδόλως προκαλεί γνωστική σύγκρουση!** (Οι ίδιοι μαθητές γνωρίζουν λ.χ. ότι -2>-4 , αλλά δεν τους προκαλεί κάποια ιδιαίτερη εντύπωση.)

Πρέπει **να σχεδιαστεί καταλλήλως** η παρουσίαση: Π.χ. να πει ο διδάσκων: *«Ορισμένες ανισώσεις φαίνονται εξ αρχής ότι είναι αδύνατες! Λόγου χάριν η ανίσωση : (½) χ >χ είναι φανερό ότι είναι αδύνατη, αφού το μισό, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ολόκληρο! Πιθανόν δεν χρειάζεται να την επιλύσουμε, αλλά ας το κάνουμε για να βεβαιωθούμε! (Υπάρχει σχεδόν βεβαιότητα ότι θα συμφωνήσει η Β΄ Γυμνασίου) Την λύνει για βρίσκει χ<0…. Μήπως έκανα λάθος στις πράξεις; Πού έκανα λάθος; Μπορείτε να το βρείτε; …..»*

Υπάρχει όμως, ένας σοβαρός κίνδυνος: Να μην υπάρξει γνωστική σύγκρουση ή –χειρότερα- να «συγκατοικήσει» το νέο με το παλιό!

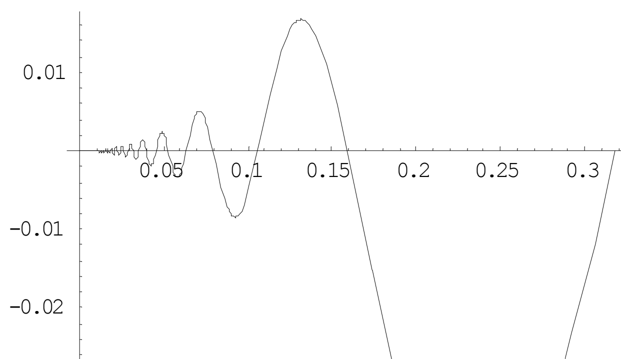
**Μια ισχυρή (πλην λανθασμένη) αίσθηση και το αντιπαράδειγμα:** Είναι γνωστό, ότι όπου υπεισέρχεται το άπειρο, η διαίσθηση περί ένα μαθηματικό θέμα, κινδυνεύει να διαψευστεί άρδην. Και πράγματι, στο παρακάτω θέμα, αυτό συμβαίνει. Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο σημεία μιας συνάρτησης και θέλουμε να τα ενώσουμε με μια «συνεχή γραμμή» Κάποιες από τις δυνατές περιπτώσεις φαίνονται στο παραδίπλα σχήμα. Όλες αυτές οι περιπτώσεις, αλλά και όλες όσες μπορεί να φανταστεί κάποιος, δημιουργούν την αίσθηση, ότι στα άκρα του [α,β] έχω θέσεις τοπικών ακροτάτων. Και η «λογική» είναι απλή :Ξεκινώντας από το (a, f(a)) Έχω τρεις δυνατές επιλογές : Ή να πάω οριζόντια («οσοδήποτε λίγο») ή να πάνω προς τα πάνω ή να πάω προς τα κάτω. Σε κάθε επιλογή μου, το σημείο (a,f(a)) αποτελεί θέση τοπικού ακροτάτου. Αυτό μου υπαγορεύεται από την κοινή Ευκλείδεια αίσθηση του τι είναι γραμμή.




*Εικόνα 6: Η λανθασμένη διαίσθηση μέσω του ανωτέρω σχήματος, είναι ισχυρότατη.*

Όμως το αντιπαράδειγμα της συνάρτησης $f:[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}$ , *με* $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ καταρρίπτει αυτή την ισχυρή πλην λανθασμένη διαίσθηση, αφού εισάγει κατ΄ ουσίαν μία «παράξενη γραμμή» που «οσοδήποτε κοντά στο (0,0)» κάνει άπειρες ταλαντώσεις παίρνοντας ετερόσημες τιμές , άρα στο (0,0) δεν είναι δυνατόν να έχω θέση τοπικού ακροτάτου.

Ουσιαστικά αυτό το αντιπαράδειγμα διευρύνει την μαθηματική μας διαισθητική εμπειρία περί του τι μπορεί να είναι μια γραμμή.

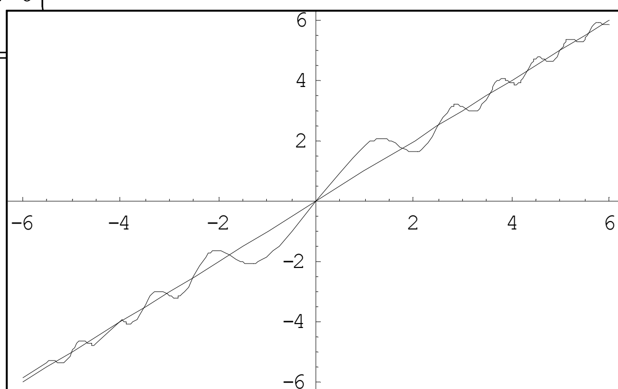



*Εικόνα 7: Η «παράξενη γραμμή» του γραφήματος της f αίρει την ισχυρή πλην λανθασμένη διαίσθηση*

**<u>Μια διαδεδομένη παρανόηση στην έννοια της ασύμπτωτης :</u>** Μια μαθηματική σχέση που ορίζει την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία σε μια συνάρτηση, είναι η $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0$ . Όταν επιχειρείται να γίνει μια μετάφραση σε εικόνα της σχέσης, συνήθως λέγεται, ότι «η ευθεία πλησιάζει στο άπειρο οσοδήποτε κοντά το γράφημα της f(x) , χωρίς να το τέμνει.» Η ίδια η λέξη «ασύμπτωτη» παραπέμπει στην «μη σύμπτωση» , άρα στην μη τμήση του γραφήματος της f σε περιοχές του απείρου. Και η λέξη και τα συνήθως παρουσιαζόμενα παραδείγματα της έννοιας, οδηγούν την σκέψη στην μη σύμπτωση. Πρόκειται για ανάλογη (και ομοίως συνήθη) παρανόηση της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας, όπου η σχέση $\alpha_\nu \to \alpha$ ερμηνεύεται με το ότι «οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο α, χωρίς όμως και να το φθάνουν.» Μια πιθανή εξήγηση γι΄ αυτή την παρανόηση στις ακολουθίες , είναι η συχνή χρήση παραδειγμάτων σύγκλισης του τύπου $3+\frac{1}{\nu}\to 3$ ή και $3-\frac{1}{\nu}\to 3$ οι όροι των οποίων πλησιάζουν το 3 από δεξιά ή αριστερά αντιστοίχως, χωρίς όμως να το φθάνουν ποτέ ή και του τύπου $3+\frac{(-1)^\nu}{\nu}\to 3$, όπου οι όροι της ακολουθίας κάνουν «ταλάντωση» εκατέρωθεν του 3, αλλά και πάλι χωρίς να το φθάνουν ποτέ. Το παράδειγμα του τύπου $\alpha_\nu=\left\{\begin{matrix} 3-\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu=3\kappa \\ 3 & \alpha\nu\ \nu=3\kappa+1 \\ 3+\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu=3\kappa+2 \end{matrix}\right\}\to 3$ δηλώνει ακολουθία που οι όροι της πλησιάζουν από δεξιά και αριστερά το 3 αλλά και ταυτίζονται με αυτό. Δύο τρία παραδείγματα τέτοια σε διδακτικά βιβλία, ίσως διευκολύνουν κάποια πράγματα στην κατανόηση της πιο βασικής έννοιας του Απειροστικού όπως είναι η σύγκλιση.

Στις ασύμπτωτες των συναρτήσεων, ένα ανάλογο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}\sin x^2 & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x= \end{cases}$$




η οποία επιδέχεται ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: η ευθεία με την $f$ , έχουν άπειρα κοινά σημεία σε οποιαδήποτε περιοχή του θετικού ή αρνητικού απείρου. Μόνο με αυτό το παράδειγμα η κατανόηση της έννοιας της ασυμπτώτου διευρύνεται . Δυστυχώς, φαίνεται, ότι ακόμα και η άριστη γνώση του σχετικού ορισμού καθώς και η άριστη εφαρμογή του, δεν είναι ικανές συνθήκες να προσεγγίσει κάποιος όλες τις περιπτώσεις εφαρμογής μιας έννοιας σε διαισθητικό επίπεδο. Αυτό βέβαια, αποτελεί μια επανανακάλυψη μιας γενικότερης διαπίστωσης, που λέει ότι «πάντα, τα περιθώρια της εις βάθος κατανόησης μιας έννοιας , ακόμα και απλής, δεν εξαντλούνται εύκολα»

**Ο ρόλος των «συνήθων λαθών» σε σχέση με τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα:** Θεωρητικώς, οι δυνητικά λανθασμένες απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις περί τα μαθηματικά, συνιστούν ένα σύνολο πολύ μεγάλου πληθικού αριθμού . Στη πραγματικότητα, οι λανθασμένες απαντήσεις, είναι **εξαιρετικά περιορισμένες σε αριθμό** και μάλιστα **επαναλαμβάνονται επιμόνως** από πολλές γενιές μαθητών. Σχεδόν όλα αυτά τα «επίμονα λάθη» αποδίδονται σε διδακτικά (ή γνωστικά) εμπόδια δηλ. σε επιστημολογικά εμπόδια.

Κατά γνώμη μας, ορισμένα από αυτά έχουν υπερεκτιμηθεί ,αφού το εμφανιζόμενο ως καθαρό επιστημολογικό εμπόδιο είναι μόνο γλωσσικό και αίρεται με κατάλληλο παράδειγμα. Το προηγούμενο θέμα με την ασύμπτωτη, ιδίως στα Ελληνικά, πράγματι αποτελεί διδακτικό εμπόδιο αφού η λέξη παραπέμπει στην μη σύμπτωση, άρα αποκλείεται να υπάρχουν κοινά σημεία συνάρτησης και ασύμπτωτης, πράγμα που όπως δείξαμε δεν συμβαίνει. Στον Αγγλόφωνο μαθητή, ο ίδιος όρος είναι «asymptote» ο οποίος ως Ελληνικός , ετυμολογικώς , δεν του λέει απολύτως τίποτα , άρα δεν αποτελεί ιδίου βαθμού διδακτικό εμπόδιο γι αυτόν (ένα μέρος του εμποδίου δεν είναι γλωσσικό)

**Οι διδακτικά σπουδαίες ιδιότητες της συνάρτησης του Dirichlet :** Πρόκειται για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \\ -1 & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \end{cases}$ αυτή η συνάρτηση:

- Ιστορικά, όταν τέθηκε στην μαθηματική κοινότητα, στάθηκε αιτία της διεύρυνσης του ατελούς μέχρι τότε (1837) ορισμού της συνάρτησης σε έναν πιο τέλειο (ότι δηλ. είναι μια «αυθαίρετη» μονοσήμαντη αντιστοιχία) πριν φθάσει στον σύγχρονο ορισμό που έγινε από τον Hausdorff to 1914 με την χρήση της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους .
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης που ορίζετο χωρίς κάποια συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση.
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης ασυνεχούς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και σε κάθε περιορισμό του.

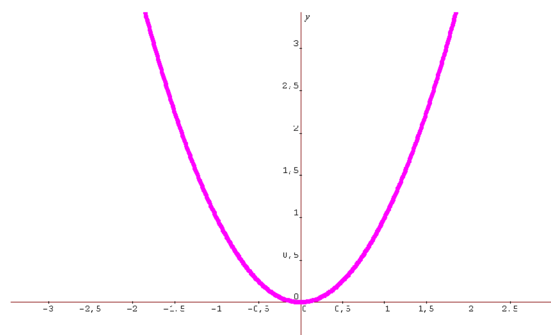
Και βεβαίως οι «παράξενες ιδιότητες της συγκεκριμένης συνάρτησης δεν εξαντλούνται εδώ. Το ενδιαφέρον όμως είναι, ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση , δείχνει την ίδια την εξέλιξη της έννοιας , ακριβώς όπως εξελίσσεται ένας οργανισμός βάσει του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» (δεχόμαστε, ότι υπάρχει ευθεία αναλογία μεταξύ εξέλιξης ενός όντος και εξέλιξης μιας έννοιας.

Έτσι, με αναλογική εφαρμογή στην Διδακτική του βιογενετικού νόμου ότι *«Η οντογένεση επαναλαμβάνει συντόμως την φυλογένεση»* και με την εισαγωγή της ως παράδειγμα σε ένα εγχειρίδιο , ο μαθητής θα κατανοήσει καλύτερα την έννοια της συνάρτησης μέσω και της συγκεκριμένης (ή όποιας άλλης τύπου Dirichlet) Ουσιαστικά –ενδεχομένως- θα προλάβει λάθη που ιστορικά γνωρίζουμε ότι έγιναν από γίγαντες της σκέψης , αφού οι διδασκόμενοι μαθητές είναι τρόπον τινά «καταδικασμένοι» να τα επαναλάβουν!

**Λάθη στην έννοια «συνέχεια συνάρτησης»** Στα Ελληνικά η λέξη **«συνέχεια»** (αλλά και σε άλλες γλώσσες) είναι συνυφασμένη με την έννοια της **συνεκτικότητας** (δηλ. του «μονοκόμματου» ) Έτσι:

Το γιατί οι ακολουθίες με τα διακριτά τους σημεία είναι «συνεχείς συναρτήσεις», είναι το πρώτο γνωστικό εμπόδιο που θα αντιμετωπίσουν στο πρώτο έτος σπουδών τους στα ανώτερα Μαθηματικά οι μαθητές μας, αφού η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο ,βάσει αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ορίζεται μόνο για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αυτό το εμπόδιο, προστίθεται σε άλλες συνήθεις παρανοήσεις για την συνέχεια που υπάρχουν στον μαθητικό πληθυσμό:

**Πλάνη 1** : «Οι συνεχείς συναρτήσεις σχεδιάζονται με μονοκονδυλιά στο πεδίο ορισμού τους»

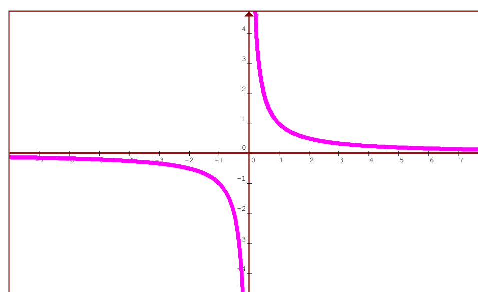



Εικόνα 8: Η τετραγωνική συνάρτηση

**Αντιπαράδειγμα στην πλάνη 1:** Η φ : R→R με φ(χ)= χ2 έχει άπειρο μήκος και δεν σχεδιάζεται με «μονοκονδυλιά»

**Αναδιατύπωση: Πλάνη 2:** «κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μήκους (:=μέτρου) γράφεται με μονοκονδυλιά»)

**Αντιπαράδειγμα στην Πλάνη 2** : Έστω: $f:[-1,0)\cup(0,1]\to \mathbb{R} \;\; \mu\varepsilon \;\; f(x)=\dfrac{1}{x}$ με μ([-1,+1])=2 όπου η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , όμως στο 0 παρουσιάζει «άπειρο πήδημα» και άρα δεν μπορεί να γραφεί με μονοκονδυλιά (πέραν του ότι έχει κι αυτή άπειρο μήκος)



Εικόνα 9: f : f(x)=1/x

**Νέα αναδιατύπωση: Πλάνη 3 :** «Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, γράφεται με μονοκονδυλιά»

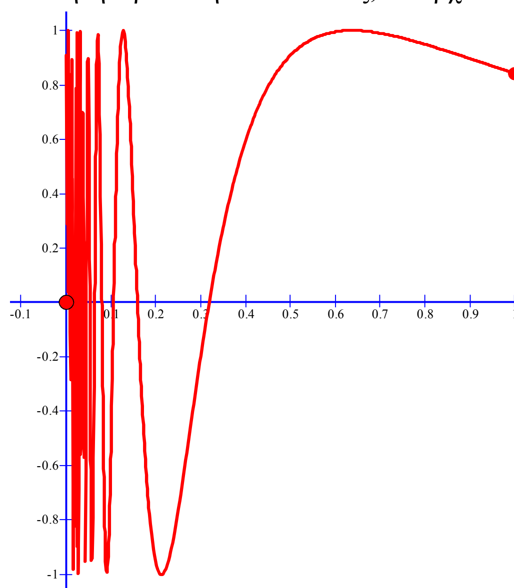
**Αντιπαράδειγμα στην πλάνη 3 :** Η συνάρτηση της εικόνας 9 ! Πράγματι, αποδεικνύεται, ότι δεν γράφεται με μονοκονδυλιά , αφού έχει άπειρο μήκος (η συγκεκριμένη) ή θα μπορούσε να έχει πεπερασμένο μεν, αλλά με άπειρη ταλάντωση . Επομένως, δεν μπορεί να την σχεδιάσει ικανοποιητικά , ούτε άνθρωπος ούτε Η/Υ.

**Έσχατη αναδιατύπωση 4** «Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, έχει «μονοκόμματο» (:=συνεκτικό) γράφημα

**Αντιπαράδειγμα:** Δεν υπάρχει! Είναι σωστή η πρόταση. Εν τούτοις, υπάρχει κάτι περίεργο που διαφοροποιεί την διαισθητική (εξωμαθηματική ) έννοια της «συνάρτησης που σχεδιάζεται με μονοκονδυλιά» με την έννοια της «συνάρτησης που έχει συνεκτικό - μονοκόμματο γράφημα» πρόκειται για το παράδειγμα

$$f:[0,1]\to R \;\; \mu\varepsilon \;\; f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & \alpha\nu \;\; x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu \;\; x=0\end{cases}\pi$$

ου έχει ως γραφική παράσταση την συνάρτηση στην εικόνα 10. Εδώ λοιπόν ισχύει η πρόταση, ότι «Κάθε συνάρτηση που έχει συνεκτικό γράφημα σε διάστημα, δεν σημαίνει ότι είναι και συνεχής σε αυτό»




Εικόνα 10: Συνεκτικό μεν το γράφημα, πλην όμως, ασυνεχής στο 0

**Συμπεράσματα –Προτάσεις:** Η έννοια του αντιπαραδείγματος ως αποδεικτικού μέσου σε λανθασμένες γενικεύσεις, είναι μια διεπιστημονική έννοια που εφαρμόζεται σε όλες τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, στην Λογική και στην Φιλοσοφία , ουσιαστικά σε κάθε τομέα του επιστητού. Άρα πρέπει ως έννοια και ως λέξη να εισαχθεί στα διδακτικά εγχειρίδια και όχι μόνο των Μαθηματικών. Ουσιαστικά εισάγει αφανώς μια ειδική περίπτωση της «εις άτοπον απαγωγής» και εισάγει τον μαθητή στην έννοια της απόδειξης πολύ πριν μάθει για την έννοια καθ΄ εαυτή.

Το αντιπαράδειγμα μπορεί να άρει παρανοήσεις ,να διορθώσει λανθασμένα νοητικά μοντέλα , αρκεί να δημιουργηθεί με προσοχή ο κατάλληλος διδακτικός σχεδιασμός που θα δημιουργήσει την γνωστική σύγκρουση και η διδακτική ρήξη.

Αποτελεί εργαλείο ανταπόδειξης σε λανθασμένες εικασίες, ισχυρισμούς και γενικεύσεις είτε αφορούν τα μαθηματικά είτε όχι.

Στην Επιστημολογία και μάλιστα στο κυρίαρχο ρεύμα της διαψευσεοκρατίας, έχω ότι: «Επιστημονικό» = «Το διαψεύσιμο» Δηλ. η επιστήμη προχωρά με δοκιμές και σφάλματα και

το αντιπαράδειγμα κατέχει κεντρική θέση .Για να υπάρξει αντιπαράδειγμα, προϋπάρχει κάποιο λάθος Το λάθος δεν το κάνουν πρώτοι οι μαθητές, αλλά οι επιστήμονες και μάλιστα οι μεγαλύτεροι εξ αυτών. **Αυτή μόνο η υπόμνηση , μάλλον αρκεί για να έχουμε την σωστή στάση απέναντι στα λάθη των μαθητών μας…….**

## Βιβλιογραφικές και διαδικτυακές αναφορές:


**Chalmers A.** «Τί είναι αυτό που λέμε Επιστήμη;» Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 2001 (σελ.57-118)

***Γαγάτσης Α.«***Διδακτική των Μαθηματικών» Θεωρία –Έρευνα , Θεσσαλονίκη 1995 (σελ.239-258)

**Κολέζα Ε.** «Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» Αθήνα 2000 (σελ.53-62)

***Πλατάρος Ι***.:«Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων» διπλωματική εργασία στο ΜΠΕ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του Παν. Αθηνών -2004 Διατίθεται σε: www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_plataros.pdf

***Πλατάρος Ι.***:«Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης» εργασία. Διατίθεται:briefcase.pathfinder.gr/download/557157

***Σπύρου Π. - Γαγάτσης Α***. «Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και Διδακτική μεταφορά της» διατίθεται: http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf